ملاحظة: $A=N$

$xRy \Leftrightarrow \frac{2x+y}{3} \in Z$

$\Leftrightarrow \exists n \in N : 2x+y=3n$

$2x+x=3n$

$3x=3n$

الزمرة

تعريف:

لتكن A مجموعة غير خالية ولكن $(\cdot)$ قانون تشكيل داخلي معرف على A أي

$(A, \cdot)$ بنية جبرية.

نقول عن $(A, \cdot)$ أنها زمرة إذا حققت ما يلي

1- $(\cdot)$ تجميعي.

2- يوجد $e \in A$ حيادي للقانون $(\cdot)$.

3- لكل عنصر $x \in A$ نظير بالنسبة للقانون $(\cdot)$

ملاحظة: إذا كانت $(A, \cdot)$ زمرة وكان $(\cdot)$ تبديلي عندها تدعى A بزمرة تبديلية.

أمثلة:

$(N, +)$: ليست زمرة لأن $3 \in N$ ولكن نظيره -3 غير موجود في N

$(Z, +)$: زمرة تبديلية لأن + تجميعي وتبديلي كذلك $0 \in Z$ حيادي الجمع وإن $x \in Z$ نظيره $-x \in Z$ بالنسبة لـ $(+)$

$(R, +)$ و $(C, +)$ و $(Q, +)$: زمرة تبديلية لأن .... م نفس يالنوت

$(Z, -)$: ليست زمرة لأن - ليست تجميعي

$4-(3-2)=4-1=3$

$(4-3)-2=1-2=-1$

إن $4-(3-2) \neq (4-3)-2$

$(Q, \cdot)$: ليست زمرة لأن $0 \in Q$ ولكن لا يملك نظير فيها (نظير $x \in Q$ هو $\frac{1}{x}$ بالنسبة للقانون $(\cdot)$)

$(Q^*, \cdot)$ و $(C^*, \cdot)$ و $(R^*, \cdot)$: تشكل زمر تجميعي

$1 \in Q^*$ حيادي الضرب

نظير $x \in Q^*$ هو $\frac{1}{x} \in Q^*$

* الزمرة $\frac{Z}{nZ}$:

حيث $n \in N^* \setminus \{1\}$

مراجعة.

$A=Z$ و n عدد طبيعي مغاير للصفر والواحد، عندها نعرف العلاقة الثنائية R بالشكل.

$xRy \Longleftrightarrow \exists t \in Z \quad x-y=tn$

إن R علاقة تكافؤ.

$(\Longleftrightarrow x \equiv y \mod n)$

كذلك $\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{n-1}$ صفوف تكافؤ العلاقة R

نرمز لمجموعة صفوف التكافؤ بالرمز $\frac{Z}{nZ}$ أي

$$\frac{Z}{nZ} = \{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{n-1}\}$$

مثال

$$\frac{Z}{6Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\}$$

ولنزود المجموعة $\frac{Z}{nZ}$ بقانون تشكيل داخلي $\oplus$

$$\overline{a}, \overline{b} \in \frac{Z}{nZ} : \overline{a} \oplus \overline{b} = \overline{a+b} \in \frac{Z}{nZ}$$

ومنه $\left(\frac{Z}{nZ}, +\right)$ بنية جبرية.

إن $\left(\frac{Z}{nZ}, +\right)$ زمرة تبديلية.

1) + تجميعي. كتابة الشرح ثابتة

$$(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c} = \overline{a+b}+\overline{c} = \overline{a+(b+c)}$$

لأن + تجميعي في Z

$$= \overline{a} + \overline{b+c} = \overline{a} + (\overline{b}+\overline{c}).$$

2) + حيادي. + حيادي القانون لأن:

$$\overline{0} \in \frac{Z}{nZ}$$

$$\left.\begin{array}{l} \overline{0}+\overline{a} = \overline{0+a} = \overline{a} \\ \overline{a}+\overline{0} = \overline{a+0} = \overline{a} \end{array}\right\} =$$

مهما يكن $a \in \frac{Z}{nZ}$

3) + تبديلي لأن:

$$\overline{a}+\overline{b} = \overline{a+b} = \overline{b+a} = \overline{b}+\overline{a}$$

لأن + تبديلي في Z

④ ليكن $\bar{a} \in \frac{Z}{nZ}$ ... د ...

$\overline{(n-a)} + \bar{a} = \bar{0}$

$\overline{n-a} \in \frac{Z}{nZ}$ و

مثال: أثبت أنه $\left(\frac{Z}{6Z}, +\right)$ زمرة تبديلية.

الحل: $\frac{Z}{6Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$

1 - + تجميعي من النظرية تماماً

2 - + تبديلي : لأن الجدول متناظر بالنسبة للقطر الرئيسي

$\bar{b} + \bar{a}$ أو $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b} \underset{\text{ل}}{=} \overline{b+a}$

لأن + تبديلي في Z

3 - $\bar{0} \in \frac{Z}{6Z}$ محايد وموضحة من الجدول

4 - $\bar{0} \in \frac{Z}{6Z}$ نظيره $\bar{0} \in \frac{Z}{6Z}$

$\bar{1} \in \frac{Z}{6Z}$ نظيره $\bar{5} \in \frac{Z}{6Z}$

$\bar{2} \in \frac{Z}{6Z}$ نظيره $\bar{4} \in \frac{Z}{6Z}$

$\bar{3} \in \frac{Z}{6Z}$ نظيره $\bar{3} \in \frac{Z}{6Z}$

$\bar{4} \in \frac{Z}{6Z}$ نظيره $\bar{2} \in \frac{Z}{6Z}$

$\bar{5} \in \frac{Z}{6Z}$ نظيره $\bar{1} \in \frac{Z}{6Z}$

وظيفة $\left(\frac{Z}{10Z}, +\right)$

انتهت المحاضرة